Densité des polynômes orthogonaux (201, 209, 213, 234, 235, 239, 245, 250)

BTP, Objectif Agrégation p. 110 et 140

thm : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et p une fonction mesurable, strictement positive telle que il existe $\alpha > 0$ tel que $\int_I e^{|x|\alpha} p(x)dx < +\infty$. Alors la famille des polynômes de I dans $\mathbb{R}$ est dense dans $L^2(I,p)$.

Explication de la démonstration :

→ caractérisation de la densité dans les espaces de Hilbert : $\text{Vect}(x^n, n\in\mathbb{N})^\perp = \{0\}$.

→ avec fonction adaptée, transformée de Fourier ⇝ prolonge en fonction holomorphe.

→ écriture en DSE, fonction holomorphe nulle sur un voisinage de 0 ⇝ prolongement analytique nulle sur une bande

→ injectivité de la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$ pour conclure.

démo :

* Montrons que p est une fonction poids.

On a $\forall n\in\mathbb{N}$, $|x^n| = o(e^{\alpha|x|})$ donc $\int_I |x^n| p(x)dx < +\infty$. Ainsi p est une fonction poids.

* Montrons que $\forall n\in\mathbb{N}$, $x^n \in L^2(I,p)$:

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\|x^n\|_2^2 = \int_I |x^n|^2 p(x)dx = \int_I |x^{2n}| p(x)dx = \|x^{2n}\|_1$.

Or $x^n \in L^1(I,p)$ $\forall n\in\mathbb{N}$, puisque p est une fonction poids. D'où $x^n \in L^2(I,p)$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

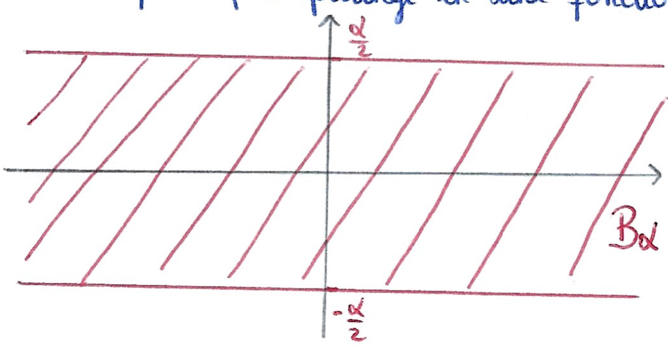
Soit $f \in \text{Vect}(x^n, n\in\mathbb{N})^\perp$.

* On considère $\varphi(x) = \begin{cases} f(x)p(x) & \text{si } x\in I \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Montrons que $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

On a $|f(x)p(x)| = |f(x)|p(x) \leq \frac{1}{2}(1+|f(x)|^2)p(x)$. Or comme p est une fonction poids et $f\in L^2(I,p)$, on a $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$.

On peut alors considérer, $\hat{\varphi}(\omega) = \int_I f(x)p(x)e^{-i\omega x}dx$ $\forall \omega\in\mathbb{R}$, la transformée de Fourier de φ.

Montrons que $\hat{\varphi}$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $B_\alpha := \{z\in\mathbb{C}, |\text{Im}(z)| < \frac{\alpha}{2}\}$.



On pose $g(z,x) = f(x)p(x)e^{-izx}$

et $F(z) = \int_I g(z,x)dx = \int_I f(x)p(x)e^{-izx}dx$.

Montrons que F est holomorphe sur B_α.

rem : On veut utiliser le thm d'holomorphie sur F

Montrons que F est bien définie, ce qui nous permettra d'avoir la domination pour utiliser le thm d'holomorphie sur F, sur B_α.

Pour $z \in B_\alpha$, $|g(z,x)| = |f(x)p(x)e^{-izx}| \leq |f(x)|p(x)e^{\frac{\alpha|x|}{2}} \leq \frac{1}{2}\left(|f(x)|^2 + e^{\alpha|x|}\right)p(x)$.

Comme $f \in L^2(I,p)$ et $\int_I e^{\alpha|x|}p(x)\,dx < +\infty$, on a F qui est bien définie sur B_α.

Thm d'holomorphie :

- $\forall z \in B_\alpha$, $x \longmapsto g(z,x)$ est mesurable sur I.
- $\forall x \in I$ pp, $z \longmapsto g(z,x)$ est holomorphe sur B_α.

Ainsi F est holomorphe sur B_α et on a $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$F^{(n)}(z) = \int_I \frac{\partial^n g(z,x)}{\partial z^n}\,dx = \int_I (-i)^n x^n f(x)p(x)e^{-izx}\,dx.$$

* Montrons que f est nulle sur I.

On a $F^{(n)}(0) = (-i)^n \int_I x^n f(x)p(x)\,dx = (-i)^n \langle f, x \mapsto x^n \rangle_p = 0$ par hypothèse $f \in \mathrm{Vect}(x^n, n \in \mathbb{N})^\perp$

Ainsi par unicité du DSE d'une fonction holomorphe, F est nulle sur un voisinage de 0.

rem : Le plus grand possible est $B(0,\frac{\alpha}{2})$.

Par le thm du prolongement analytique, F est nulle sur B_α, qui est convexe.

Or $\mathbb{R} \subset B_\alpha$ et F coïncide avec $\hat{\varphi}$ sur $\mathbb{R}$, donc $\hat{\varphi} \equiv 0$ sur $\mathbb{R}$.

Par injectivité de la transformée de Fourier sur $L^1(\mathbb{R})$, on a $\varphi(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$ pp.

Donc en particulier $f(x)p(x) = 0$ pour $x \in I$ pp. Or p est strictement positive donc $f(x) = 0$ pour $x \in I$ pp.

Questions : Densité des polynômes orthogonaux

- $|f(x)|p(x) \leq \frac{1}{2}(1+|f(x)|^2)p(x)$?

On a pour $x>0$, $x \leq \frac{1}{2}(1+x^2)$ car $(1-x)^2 = 1-2x+x^2 \geqslant 0$. donc $1+x^2 \geqslant 2x$.

- $|f(x)p(x)e^{-izx}| \leqslant |f(x)|\,p(x)\,e^{\frac{\alpha}{2}|x|} \leq \frac{1}{2}(|f(x)|^2+e^{\alpha|x|})p(x)$?

Comme $z \in B_\alpha$ alors $|Im(z)| < \frac{\alpha}{2}$.

$$|e^{-izx}| = |e^{-iRe(z)x + Im(z)x}| = |e^{Im(z)x}| \leq e^{\frac{\alpha}{2}|x|}$$

On a pour $x,y>0$ on a $(y-x)^2 = y^2+x^2-2xy \geqslant 0$ donc $y^2+x^2 \geqslant 2xy$.

D'où $\frac{x^2+y^2}{2} \geqslant xy$.

- Les polynômes orthogonaux associé à p forme une base hilbertienne de $L^2(I,p)$?

Construction des polynômes orthogonaux : Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on a $Vect(x^n, n\in\mathbb{N}) = Vect(P_n, n\in\mathbb{N})$.

Ainsi la famille des polynômes orthogonaux associée à p est dense dans $L^2(I,p)$ et orthonormée
Donc c'est une base hilbertienne de $L^2(I,p)$.